TurboIEG.com

ملخص :

تفاضل وتكامل 102

Calculus 102

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة الصناعية

2023

* REDUCTION FORMULA :

1. $\int \sin^n x \cdot dx = \frac{-1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \cdot dx$
2. $\int \cos^n x \cdot dx = \frac{+1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx$
3. $\int \tan^n x \cdot dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \cdot dx$
4. $\int \sec^n x \cdot dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \cdot dx$

A, B Linear

* $\int \sin A \cos B \cdot dx = \frac{1}{2} \int \sin(A-B) + \sin(A+B) \cdot dx$
* $\int \sin A \sin B \cdot dx = \frac{1}{2} \int \cos(A-B) - \cos(A+B) \cdot dx$
* $\int \cos A \cos B \cdot dx = \frac{1}{2} \int \cos(A-B) + \cos(A+B) \cdot dx$

Trigonometric Substition

* $a^2 - x^2$, $x = a \sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
* $a^2 + x^2$, $x = a \tan\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
* $x^2 - a^2$, $x = a \sec\theta$, $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ or $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$

IMPROPER INTEGRALS

* Thm: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \Rightarrow$
  - $p > 1$ → convergent $\Rightarrow = \frac{1}{p-1}$
  - $p \le 1$ → divergent

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} \Rightarrow$ عندما تؤول
  - $p \ge 0$ → exist
  - $p < 0$ → d.n.e

* $\lim_{x \to 0^{+}} \frac{1}{x^p} \Rightarrow$ عندما تؤول
  - $p \le 0$ → exist
  - $p > 0$ → d.n.e

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

radius : |a|

vertical line
$r = a \sec\theta$

horizontal line
$r = a \csc\theta$

maysjouban

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* $\int \sec x \, dx$

$= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}$

* $\int \csc x \, dx$

$= \int \frac{\csc x (\csc x + \cot x)}{(\csc + \cot x)}$ بالمقام بدوابيه

$= -\ln|\csc + \cot|$ or

$= \ln|\csc - \cot|$

L'Hopital

① $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$ → مباشر

② $(0 \cdot \infty)$ or $[\infty - \infty]$

↓ ↓

$\frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$

① ضرب بمرافق
② توحيد مقامات
③ خواصهم

③ $1^\infty, 0^0, \infty^0$

* نبادد Ln لـ y

نجد Lim للناتج الأصلي

وناتج النهائي = e

Arc length

* Def: if f' is continuous on $[a,b]$, then the length of the curve y, $a \le x \le b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Surface Area

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

f is positive and f' is continuous

$a \le x \le b$

revolved about x-axis

---

* Arc length of circle $= 2\pi r$

* Surface area of a ball $= 4\pi r^2$ = circle

---

* في أسئلة التكامل لـ $\sin^n x / \cos^n x$

* إذا كانت القوة فردية ← نستعمل متطابقات:

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

بعدها نستعمل التعويض

* أما إذا كانت القوة زوجية نستعمل متطابقات:

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

---

p.48 ← متطابقات الدوال المثلثية العادية

p.129 ← متطابقات القترانات الزائدية

(الاستبدالات المثلثية p.112)

$\int \cos^n x \sin^m x$

* فردي فردي ← نعزل تحت الأس الأكبر

زوجي زوجي ← متطابقات

فردي زوجي ← نعزل تحت الزوجي

$\int \cot^n \csc^m / \int \sec^n \tan^m$

فردي زوجي ← نعزل تحت الفردي

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* Absolute convergence, Conditional convergence:

$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Absolute → $\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$

① conv. إذا طلعت conv. بحالة الأولية أكيد مبني الأولية: Absolutely convergent

② div. إذا طلعت div. بحالة الأولية، أما الأولية في حالتين يا إما div. (مالها أي معنى) أو أنها conv. بس conditionally conv.

* power series:

الصيغة العامة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

* موقعها: يكون مع x^n بس

$x - a = 0$

$x = a$

∴ Centered at a

x: variable

c_n: coefficient

* هون نحكي بأولا وبس بأواخر / يكون convergent

Radius of convergence & Interval of convergence

والا شلة يكون ∞ طالع (استثناء من القاعدة تحت فوق) (دايما بنحل بـ Ratio test أو root test بس)

* وبنحي الـ power series من وجود متغير x

	Radius of convergence	Interval of convergence
1 the series converges only when $x = a$ (بنحل وطالع بالنهاية بتأكدي إذا النهاية بتروح لـ 0 conv.)	$R = 0$	da 4
2 The series converges for all x (إذا طلعت وطالع "كل x" 0 بتروح يكون conv. بدها اصغر من أي رقم موجب حتى لو كان كبير فترة ما بتعتمد على x)	$R = +\infty$	$(-\infty, \infty)$
3 There is a positive number that series converges if $\lvert x-a \rvert < R$ & $\lvert x-a \rvert > R$ (بنحل وطالع بعض فترة الوسع قبل ما تطلع اختلاف)	R	$[a-R, a+R]$ $(a-R, a+R)$ $[a-R, a+R)$ $(a-R, a+R]$

هو R وأخر شي بس اتأكد من النهايات (endpoints) بقدر الأطراف

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

*Taylor and Maclaurin Series:

- هدول حالات خاصة من دالة القوى (power series)

* Taylor series: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(x)$ — الصيغة العامة

* If $a=0$, we call it Maclaurin series

* Maclaurin series: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$

① * أول صيغة سؤال أنه يسألوا عن صيغة واحدة من التوسعين ويعطونا $f(x)$ بالسؤال.

الحل:

انه اطلع: $f(x) = __ \to f(a) = \ldots$

$f'(x) = __ \to f'(a) = \ldots$

$f''(x) \to f''(a) = \ldots$

$f^{(n)}(x) \to f^{(n)}(a) = \ldots$

وطبقها حسب القانون على شكل series

$f(a) + __ + __ + \ldots$ (حد أول + الحد الثاني)

هاد بيكون اللي بدهم اياه

② * لو استعملنا الجدول احيانا (أو انا بزيد شكلة) بسهل علينا حل هيك اسئلة

* $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

* $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$ في مضروب

* $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

* $\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)}$ (لا يظهر ما في مضروب)

* $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} * \frac{x^n}{n}$ (لا يظهر ما في مضروب)

* $(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$

③ سمكن نستعمل الجدول كمان نطلع ع هويش بزيط بساوي (sum)

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* Infinite series:

$a_1, a_2, a_3, a_4 \longrightarrow$ seq.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \longrightarrow$ series $= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum a_n$

$a_n \neq S_n$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 \rightarrow S_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow S_2 + a_3$

* We need to find the $\lim_{n \to +\infty} S_n$ to know if $\sum a_n$ has a sum or not.

$a_n \leftarrow S_n$?? عشان نوجد النهاية

* Ex. $\sum_{n=1}^{+\infty} (1) = 1 + 1 + 1 + \dots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 2$

$S_3 = 3$

$\therefore S_n = n$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \infty$

$\therefore$ div.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 1$ has no sum

$\sum (n - \frac{1}{n}) \rightarrow a_n$ مش S_n

* Geometric series:

Ex. $5 + 5^2 + 5^3 + \dots$

$\sum_{n=m}^{+\infty} r^n$ متقاربة / متباعدة

r → ratio المطلوب:

① كيف نميزها عن غيرها

② كيف نعرف إذا موجودة أو لا

① Ex. $\sum_{n=5}^{+\infty} 4^n$

يجوز نبدأ من أي رقم

$= 4^5 + 4^6 + 4^7 + \dots$

يجب أن تبدأ كل حدودها من الأس نفسه

② Thm

if $\sum_{n=m}^{+\infty} r^n$ conv.

then $\sum_{n=m}^{+\infty} r^n = \frac{r^m}{1-r}$

div. conv. div.

-1 1

* The divergence test:

divergent إذا ليس بشرط أن يكون متقارب

متقارب إذا متباعد

* $\sum a_n$, if $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$, then $\sum a_n$ diverges.

* If $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (Test fails), $\sum a_n$ may either be conv. or div.

* The Integral Test:

$\sum_{m}^{\infty} a_n \rightarrow a_n = f(x)$ $[m, \infty)$ $n \to x$

* There are 3 conditions you need to check them out to know if you can use this test:

① $f(x)$ positive

② continuous

③ decreasing ----

$\sum_{m}^{\infty} f(x) = \lim_{t \to \infty} \int_{m}^{t} f(x)$

* إذا كان تكامل الدالة متقارب فالمتسلسلة متقاربة

$\sum$ = div إذا كان التكامل متباعد

$\sum$ = conv. إذا كان التكامل متقارب

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* p-series:

$\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ — الصيغة العامة

قانونها ←

- $p > 1 \rightarrow$ conv.
- $p \leq 1 \rightarrow$ div

div. ← a → conv.

(ما بتقدر أعرف الجواب إذا السلسلة من هذا النوع conv. or div.)

* Ex. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، $n^{\frac{1}{2}}$ ، $\frac{1}{2} < 1$ ∴ div.

* Alternating series test: (A.S.T)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ ← هادي السلسلة اللي بتشتغل عليها

فيها عندي شرطين حتى تكون الجواب convergent

① $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

② $f(x) = a_x$ decreasing $f'(x) < 0$

if A.S.T fails, we should immediately use D.T.

* Ratio test:

بنستعملها لما تشوف $n!$ أو n^n أو فيها $(-1)^n$ (Alternating)

$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = C$

(بدون الـ absolute بنسميها Alternating value)

① $C < 1 \rightarrow \sum a_n$ conv. (Absolutly conv.)

② $C > 1$ or $C = \infty \rightarrow \sum a_n$ div.

③ $C = 1$ Test fails (no conclusion)

* Root test:

$\lim_{n \to +\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}} = C$

بنستعمل لما تشوف a_n عند الـ n قوة عشان نريح n من $\frac{1}{n}$

Absolute value بنفيد منها عشان نخلص من الـ Alternating لما تكون الحدود موجبة

① $C < 1 \rightarrow \sum a_n$ conv. (Absolutly conv.)

② $C > 1$ or $C = \infty \rightarrow \sum a_n$ div

③ $C = 1$ Test fails (no conclusion)

(نفس الـ Ratio test)

note

* $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$

* $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}$ by L'Hopital

* Algebraic properties of Infinite series:

* في 3 نقاط:

1. if $\sum a_n$ & $\sum b_n$ are both convergent, then:

$\sum a_n \pm b_n$ is convergent

* if $\sum a_n$ convergent, $c \neq 0$, $\sum c a_n$ is convergent too
* if $\sum b_n$ is divergent, $c \neq 0$, $\sum c a_n$ is divergent too.

2. if $\sum a_n$ conv & $\sum b_n$ div., then:

$\sum a_n \pm b_n \Rightarrow$ div.

3. if $\sum a_n$ & $\sum b_n$ div.; then:

$\sum a_n \pm b_n$ may either be conv. or div..

* limit comparision Test:

بنستعمل لما تشوف كثير حدود على كثير حدود، أو جذر كثير حدود على كثير حدود، أو كثير حدود على جذر كثير حدود

$\sum a_n$, $\sum b_n$ are series with positive terms

$C = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$

if $C > 0$, $C \neq \infty$, then both series are conv. or div.

* بتكون عندي معطيات عن وحدة من

① اختر قوية بالمقام واختر $\sum b_n$ بحيث بالبسط أكبر قوة بالمقام

② بجد بين طبيق بالقانون

③ بتشوف الشروط ← بتلزم الكون اذا conv. or div.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner