



TurbolEG.com



ملخص :

تفاضل وتكامل 102

Calculus 102

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة الصناعية

2023



* REDUCTION FORMULA :

$$\boxed{1} \int \sin^n x \cdot dx = \frac{\ominus 1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \cdot dx$$

$$\boxed{2} \int \cos^n x \cdot dx = \frac{\oplus 1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx$$

$$\boxed{3} \int \tan^n x \cdot dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} \ominus \int \tan^{n-2} x \cdot dx$$

$$\boxed{4} \int \sec^n x \cdot dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \cdot dx$$

A, B Linear

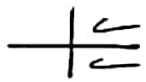
$$* \int \sin A \cos B \cdot dx = \frac{1}{2} \int \sin(A-B) + \sin(A+B) \cdot dx$$

$$* \int \sin A \sin B \cdot dx = \frac{1}{2} \int \cos(A-B) - \cos(A+B) \cdot dx$$

$$* \int \cos A \cos B \cdot dx = \frac{1}{2} \int \cos(A-B) + \cos(A+B) \cdot dx$$

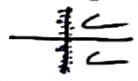
Trigonometric Substitution

$$* a^2 - x^2, x = a \sin \theta$$



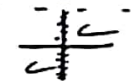
$$, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$* a^2 + x^2, x = a \tan \theta$$



$$, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$* x^2 - a^2, x = a \sec \theta$$



$$, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ or } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$$

IMPROPER INTEGRALS

$$* \text{Thm: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \Rightarrow \begin{cases} p > 1 \rightarrow \text{convergent} \Rightarrow \frac{1}{p-1} \\ p \leq 1 \rightarrow \text{divergent} \end{cases}$$

$$\# \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \rightarrow \text{exist} \\ p < 0 \rightarrow \text{d.n.e} \end{cases}$$

$$\# \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^p} \Rightarrow \begin{cases} p \leq 0 \rightarrow \text{exist} \\ p > 0 \rightarrow \text{d.n.e} \end{cases}$$

vertical line

$$r = a \sec \theta$$

horizontal line

$$r = a \csc \theta$$

radius & l

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

maysjouban

$$\int \sec x \cdot dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$$

$$\int \csc x \cdot dx = \int \frac{\csc x (\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)} dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

L'Hopital

① $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ مبطل

② $(0, \infty)$ or $[\infty, \infty]$

$\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$

① ضرب با مخرج
② توحيد مقامات
③ خط كسري

③ $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

* $y \leftarrow \ln \rightarrow$ لا

لحد من
الناتج المتكرر
(والتابع المتكرر)

* Arc length of circle = $2\pi r$

* Surface area of a ball = $4\pi r^2$ circle

* $\sin x / \cos x$

* إذا كانت القوة فردية $\rightarrow$ تبطل، عظميات

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

بعد ما تبطل، تبطل

* أما إذا كانت القوة زوجية تبطل، عظميات

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

Arc length

* Def: If f is continuous on $[a, b]$, then the length of the curve

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Surface Area

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

f is positive and f is continuous

$a \leq x \leq b$
revolved about x-axis

P. 48

P. 129

الطابقان المتطابقان
الطابقان المتطابقان
P. 112

$\cos x$ & $\sin x$

فردية فردية $\rightarrow$ تحت الأسي

زوجية زوجية $\rightarrow$ متطابقان

فردية زوجية $\rightarrow$ تحت الزوجية

$\cos \cos / \sin \sin$

فردية زوجية $\rightarrow$ تحت الفردية

* Absolute convergence, Conditional convergence:

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Absolute $\rightarrow \sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$

↓

- ① conv. إذا طالت
معاينة الأهمية أكبر
مستوى الأهمية
Absolutely convergent

② إذا طالت أو معاناة
في حالتين يا إما الأهمية
أو كان (أو لا) معين
أو لا conv. سببها
(conditionally conv.)

* Power Series:

المتغير
المستقل * $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$
نوع متغيري
نوع متغير

$x-a=0$
 $x=a$
∴ centered at a
x ∴ variable
c_n ∴ coefficient

* هون نتكلم بالواو وين

يتكون / Convergent بالواو

Radius of convergence
& Interval of convergence
والاشارة بتكون ٥ حالات

استوفى لا مشكلة
بالاخر
(دائما بتكون ٥ حالات)
Ratio test
أو Root test

* وينبغي ان يكون Power series متوحد

1 the series converges only when $x=a$
(ب نقطة واحدة
تأكد في هذا case بتوحد فقط
∴ conv.)

Radius of convergence
 $R=0$

Interval of convergence
day

2 The series converges for all x

(إذا طالت وطلعت 0 بتوحد يكون conv.)
لا مشكلة من ا ب ما عطيني
فترة ما بعد على x

$R=+\infty$

$(-\infty, \infty)$

3 There is a positive number that series converges

$$\text{if } |x-a| < R \text{ \& } |x-a| > R$$

(بتوحد وطلعت في فترة التي قبل ما دخلت
انطلقت

هو R وأخرى سبب اننا في من
بقره اننا
الاطراف

R

$[a-R, a+R]$
 $(a-R, a+R)$
 $[a-R, a+R)$
 $(a-R, a+R]$

* Taylor and Maclaurin Series:

(power series) جدول حالات خاص من در

* Taylor Series: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(x)$

* If $a=0$, we call it Maclaurin Series

* Maclaurin Series: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$

* لو استعملنا الجدول احبنا ان يكون الجدول على شكل

* $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

* $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

* $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

* $\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$

* $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$

* اول صيغة سوال انما بالاعتماد صيغة واحدة من التوسيع ونعطونا $f(x)$ بالبرهان

انه اطلع $f(x) \rightarrow f(a)$
 $f'(x) \rightarrow f'(a)$
 $f''(x) \rightarrow f''(a)$
 $\vdots$
 $f^{(n)}(x) \rightarrow f^{(n)}(a)$
 ونطبقها حسب القوانين على شكل
 $f(a) + \dots + \dots + \dots$
 في هذا يكون اليهم اياه

(ب) ممكن نستعمل الجدول علشان نطلع في جدول
 نربطها بايدي (sum)

* Infinite series :

$a_1, a_2, a_3, a_4 \rightarrow \text{seq.}$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \rightarrow \text{series} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n$

$a_n \neq S_n$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 \rightarrow S_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow S_2 + a_3$

...

* We need to find the $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ to know if $\sum a_n$ has a sum or not.

* Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \frac{1}{n}) \rightarrow a_n \rightarrow S_n$

* Geometric series :

Ex. $5 + 5^2 + 5^3 + \dots$

$\sum_{n=m}^{\infty} r^n$

$r \rightarrow \text{ratio}$

كيفية حسابها

كيف نعرف إذا كانت موجودة أم لا

الصيغة العامة

Ex.

$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n$

بعضها غير معرف

$S = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots$

يجب أن نرى كل حد على حدة ولا نرى المجموع

$S_n = ??$

$S_1 = 1$

$S_2 = 2$

$S_3 = 3$

$\therefore S_n = n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

$\therefore \text{div}$

$\therefore \sum 1$ has no sum

Then

if $\sum_{n=m}^{\infty} r^n$ conv.

then

$\sum_{n=m}^{\infty} r^n = \frac{r^m}{1-r}$

* The divergence test :

بعضها غير معرف

* $\sum a_n$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, then $\sum a_n$ diverges.

* If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (Test fails), $\sum a_n$ may either be conv. or div.

* The Integral Test :

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \rightarrow a_n = f(x) \quad [m, \infty)$

* There are 3 conditions you need to check them out before to know if you can use this test.

(1) $f(x)$ positive

(2) continuous

(3) decreasing

$\sum_{n=m}^{\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_m^t f(x) dx$

* إذا كنت تريد أن تعرف إذا كان متقارباً أم لا

