TURBO
Continuous change

دفتر :

بحوث عمليات 2

OR2

Part 1

للطالبة لين شاهر د.مؤيد طناش

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة الصناعية

2025

TurboIEG.Com

Turbo Team Youtube

OR 2

Dr. Moayad Tanash

(integer) خ بعد الحسبان قبل أن تكون قيمها ال اعداد صحيحة ← $x_1, x_2 \cdots$

Branch and Bound Method. هي integer Programing الطريقة لحل ←

Limiting for feasible region حتى اعمل constraints إضافة ← للبدء هو

Introduction to Integer Programming

IP ⇒ integer programing

- An IP in which all variables are required to be integers is call a pure integer programming problem. PIP ⇒ pure integer programing
  لـ عندما تكون جميع المتغيرات في المسألة (Integer).
- An IP in which only some of the variables are required to be integers is called a mixed integer programming problem. (MIP) ⇒ Mix ...
  عندما تكون بعض المتغيرات صحيحة والأخرى عشرية (كسرية).
- An integer programming problem in which all the variables must be 0 or 1 is called a 0-1 IP. ⇒ Binary model 80 (تشغيل / ايقاف) 0,1
  No Yes
- The LP obtained by omitting all integer or 0-1 constraints on variables is called LP relaxation of the IP.
  LP ← mix integers Fraction بين
  لـ ازالة شرط العدد الصحيح ⇐ LP relax
  لكي نجعل المسألة أسهل.

Scanned with CamScanner

Example 9.1-1 (Project selection)

5 Proj 3 years

Five projects are being evaluated over a 3-year planning horizon. The following table gives the expected returns for each project and the associated yearly expenditures:

و Max

Project	Expenditures ($ million)/year			العائد Returns ($ million)
	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Available funds ($ million)	25	25	25	

السنة الاولى الثانية الثالثة

Which projects should be selected over the 3-year horizon?

للخطوات هي

1. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ⇒ للمشاريع

رقم ال Project

2. max Z
3. Constriants
4. هل هي LP, IP, Binary ؟

لم هي Binary هل رح اختار للمشروع أو لا

اذا اخترت ال proj ← 1

اذا لم اختاره ← 0

Scanned with CamScanner

Example 9.1-1 (Project selection)

- The problem reduces to a "yes–no" decision for each project. Define the binary variable x_j

Binary

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ if project } j \text{ is selected} & \checkmark \text{ بختاره} \\ 0, \text{ if project } j \text{ is not selected} & \times \text{ ما بختاره} \end{cases}$$

Example 9.1-1 (Project selection)

⇒ You can choose min or max

⇐ لكي أحول من max الى min نضرب بسالب

The ILP model is

$$\text{Maximize } z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

subject to

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 &\le 25 \quad \text{السنة الاولى} \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 &\le 25 \quad \text{الثانية} \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 &\le 25 \quad \text{الثالثة} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

Scanned with CamScanner

Fixed-charge Problem

- The fixed-charge problem deals with situations in which the economic activity incurs two types of costs:

هناك نوعين من التكاليف

1- a fixed cost needed to initiate the activity ⇒ تدفع لمرة و احدة بغض النظر عن الانتاج او حجم النشاط

التكلفة الثابتة

2- a variable cost proportional to the level of the activity.

التكلفة المتغيرة

الى تكلفة تعتمد على مستوى النشاط أي تتغير بناءً على حجم الانتاج.

For example, the initial tooling of a machine prior to starting production incurs a fixed setup cost regardless of how many units are manufactured. Once the setup is done, the cost of labor and material is proportional to the amount produced.

مثال للفهم توضيحي: تكلفة ثابتة هي عند تشغيل ماكينة تصنع هناك تدفع لمرة واحدة مثل صيانة الماكينة وضبطها. بغض النظر عن عدد الوحدات (القطع) التي ستنتجها.

أما بعد تشغيل الماكينة، تبدأ التكاليف المتغيرة مثل المواد الخام / أجور العمال. والتي تزداد مع زيادة عدد القطع المنتجة.

Example 9.1-3 (choosing a Telephone company)

Per month → Fixed cost
Per minute → Variable cost

I have been approached by three telephone companies to subscribe to their long-distance service in the United States. MaBell (الشركة ①) will charge a flat $16 per month plus $.25 a minute. PaBell (الشركة ②) will charge $25 a month but will reduce the per-minute cost to $.21. As for BabyBell (الشركة ③), the flat monthly charge is $18, and the cost per min is $.22. I usually make an average of 200 minutes of long-distance calls a month. Assuming that I do not pay the flat monthly fee unless I make calls and that I can apportion my calls among all three companies as I please, how should I use the three companies to minimize my monthly telephone bill?

قيمة الاشتراك

Fathom: هي الوقوف عند الـ node وما تحتها Branch لها حالات:
- Integr Solution
- Infeasible region
- upperB < lowerB اذا طلع عندي

اسم جدول:

	UB	LB	Branch
max	fraction	integer	الرقم الاكبر
min	integer	fraction	الرقم الاقل

Scanned with CamScanner

9.1-3 خطم للمثال

لدينا 3 شركات للاتصالات تقدم خطوط خلوية

* أنت تجري 200 دقيقة مكالمات شهريًا

ويسمح لك بتوزيع هذه المكالمات على الـ 3 شركات.

1. MaBell → 16$ per month
   → 0.25$ سعر الدقيقة
2. PaBell → 25$ رسوم شهرية
   → 0.21$ سعر الدقيقة
3. Baby Bell → 18$ رسوم شهرية
   → 0.22$ سعر الدقيقة

الحل:

1) Decision var:

x_1, x_2, x_3 ⇐ عدد الدقائق المستخدمة لكل شركة

y_1, y_2, y_3 ⇐ متغيرات ثنائية Binary (1, 0)

- 1: إذا تم الاشتراك مع الشركة
- 0: إذا لم يتم الاشتراك.

2) Subject to:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200$$

لأن مجموع الدقائق لازم يكون 200

$$x_1 \le 200 y_1$$
$$x_2 \le 200 y_2$$
$$x_3 \le 200 y_3$$

نستخدم كل متغير ثنائي لتفعيل الرسوم الشهرية فقط إذا استهلك دقائق.

Linking constraints.

y_1, y_2, y_3 → Binary {0,1}

3) Min $z = 25y_1 + 16y_2 + 18y_3 + 0.25x_1 + 0.21x_2 + 0.22x_3$

↳ نريد تقليل التكلفة الكلية.

Scanned with CamScanner

Integer Programming Algorithm (ILP)

The basic concept underlying the branch-and-bound technique is to
divide and conquer. التقسيم والتغلب اي تقسيم المشكلة الكبيرة الى مشاكل اصغر.

Since the original "large" problem is hard to solve directly,
it is *divided* into smaller and smaller subproblems
until these subproblems can be *conquered*.

هنا optimal ال ممكن تكون اي نقطة داخل ال feasible region

The *dividing (branching)* is done by partitioning the entire set of feasible solutions into smaller and smaller subsets.

The *conquering (fathoming)* is done partially by
(i) giving a *bound* for the best solution in the subset;
(ii) discarding the subset if the bound indicates that
it can't contain an optimal solution.

These three basic steps
– branching, bounding, and fathoming –
are illustrated on the following example.

Scanned with CamScanner

example of Branch and Bound.

$$Max\ Z = 5x_1 + 8x_2$$

$$S.t \quad x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ integer}.$$

الخطوة (1) ← Lp-Relaxation يعني ما بطلّع كل كلمة integer بالبداية وحل عن طريق graphical Method.

← طيب شو طريقة حل الـ graphical فتعال للتذكير ؟

1. بحول جميع الـ constriants لمساواة
2. بكل con نفرض $x_1 = 0$ وبجد x_2 ثم نفرض $x_2 = 0$ وبجد x_1
3. بحدد الـ feasible region عن طريق أخذ قيمة أكبر وأقل منه والي بتحقق con = 0 لكل يكون الحل باتجاهها. اذا لم تحقق بيكون الاتجاه للعكس.
4. بحدد الـ Extreme points ← هي نقاط التقاطع داخل منطقة الحل وبوجد قيمهم من خلال التقاطعات بين الـ constriants
5. بجد الـ optimal من خلال تعويض الـ Extreme بالـ objective (Z)

- Max أكبر رقم
- min أقل رقم

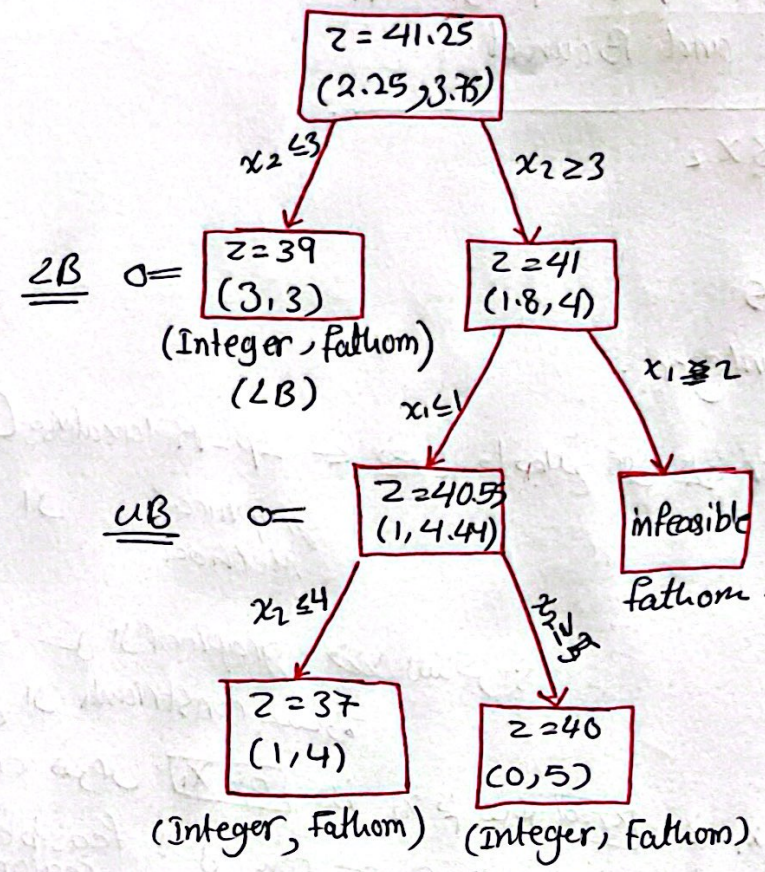
← اوجدنا الـ optimal هي (2.25 , 3.75) ولأنه Fraction رح نعمل Branch

السؤال ← لأي قيمة لعمل الـ Branch ؟

- max ← القيمة الأكبر
- min ← " الأصغر
- اما اذا كان بينهما integer بعمل فتعال لـ Fraction.

←

الخطوة 2



الخطوة 3: اختيار الـ optimal

max ← أكبر قيمة من بين الـ fathoms

min ← أقل قيمة من بين الـ fathoms

الجدول العام

	UB	LB
max	fraction	Integer
min	Integer	Fraction

Lower Bound هو
يجب ان تزيد

upper Bound هو
يجب ان تقل

لحين ان يتساووا او يعود احدهم
على بعض .

Branch and Bound Example

Consider the following *binary integer program* (BIP). A binary variable is one that is constrained to be either 1 or 0.

$$\text{Max } z = 75x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 33x_4$$

Subject to:

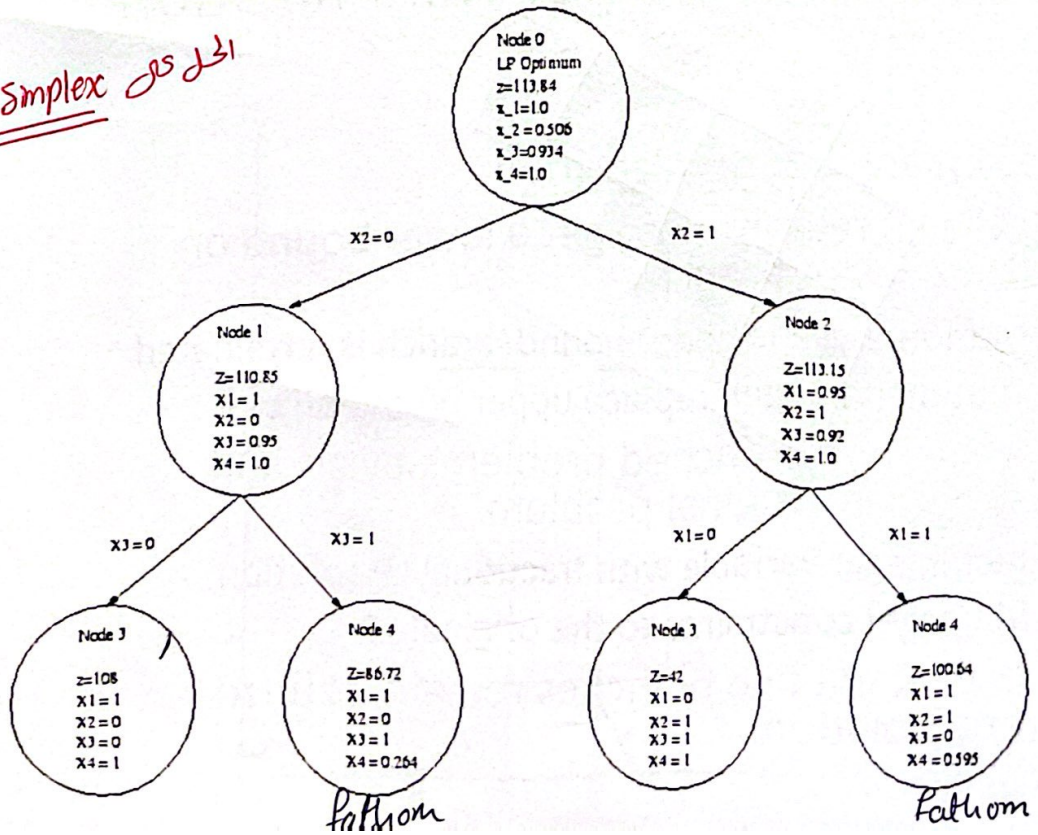
$$774x_1 + 76x_2 + 22x_3 + 42x_4 \leq 875$$

$$67x_1 + 27x_2 + 794x_3 + 53x_4 \leq 875$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ binary}$$

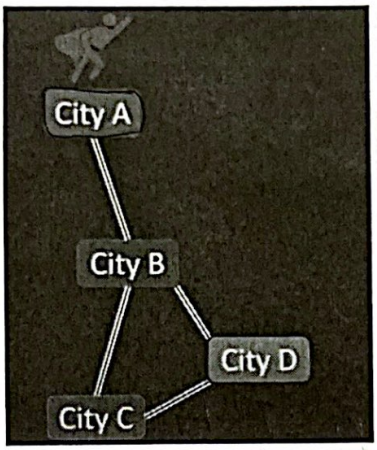
Branch and Bound Example

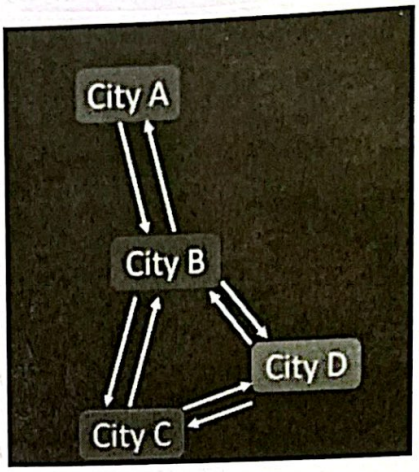
Simplex حل كل

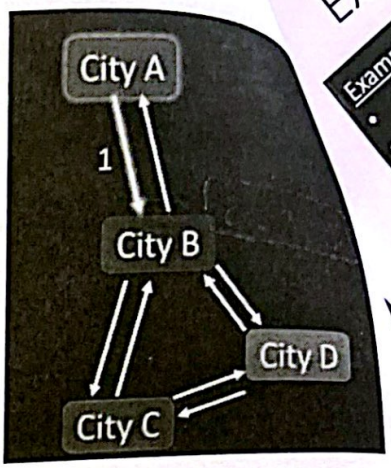


Scanned with CamScanner

Definition of A Markov Chain



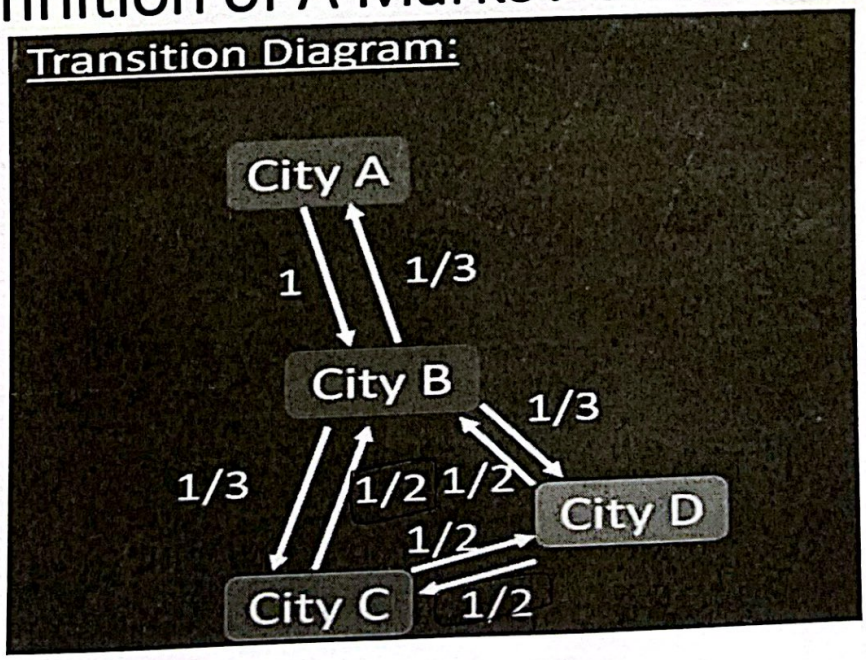




بعطي أنا حاليًا بأي حالة وقط
واستطيع ان أتوقع في اي حاله سأكون.

ننتقل من node الى node Markov
مع احتمالية .

Definition of A Markov Chain#



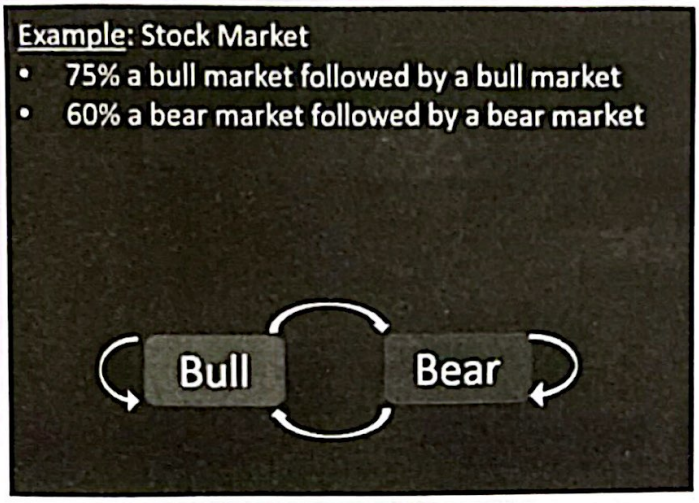
city A, B, C, D
states سميها

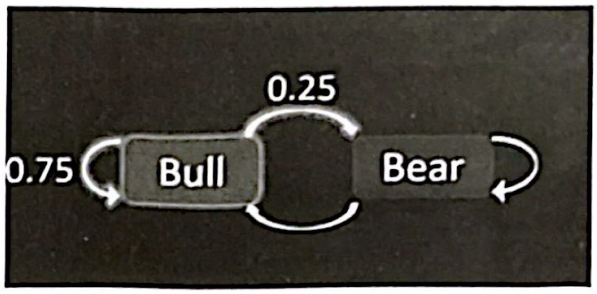
Scanned with CamScanner

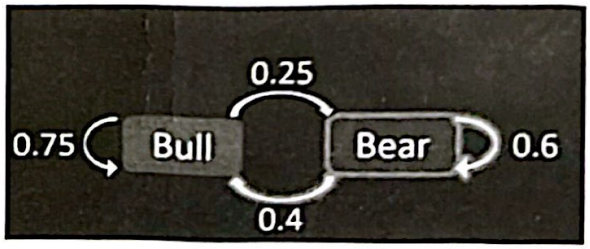
$\Sigma P = 1$

Example: Stock Market

Example: Stock Market
- 75% a bull market followed by a bull market
- 60% a bear market followed by a bear market







* عندي 2 states ← حدوم (Bull, Bear)
• ← ضع الاحتمالات للإنتقال الى ال State الاخرى.

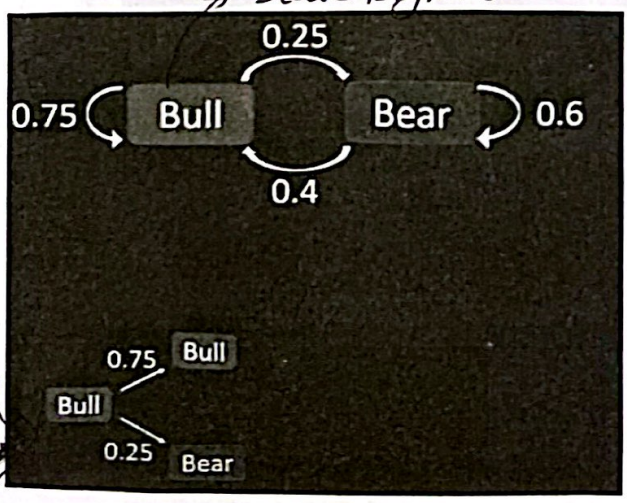
Transition → Move

← حتى حظ انك بتنجح في متحان بالاسبوع حرة بالسنة كم؟
← الجواب: 52 اسبوع * 3 متحانات = 156 فرصة نجاح

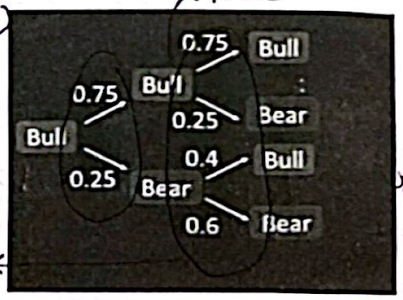
Example: Stock Market

سوق الأسهم (البورصة)

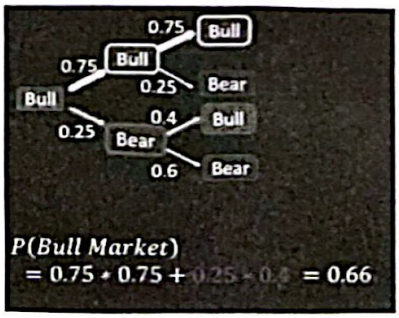
→ State Digram



→ Tree



2 Times



يصاد المثال:
• اذا بدي على نفس الخط بضرب
• اما اذا بدي اقاليد لاخر هدف بصير جمع.

الطريق الثاني — الطريق الاول

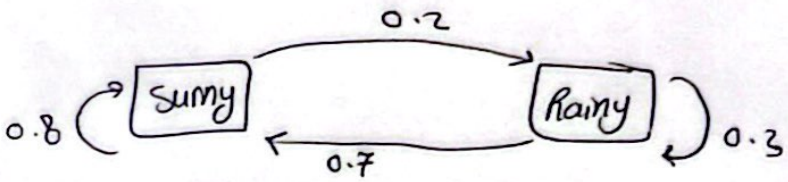
$= (0.25) * (0.4) + (0.75) * (0.75)$

$= 0.1 + 0.5625 = \underline{0.6625}$

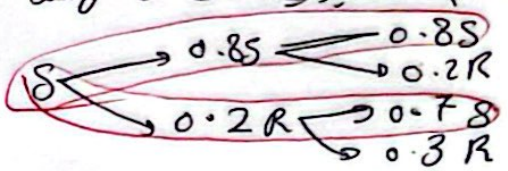
= initial State الي بدي تكون ال Bull هي ال
وانتهي عند Bull بعد 2 transition

Scanned with CamScanner

(مثال توضيحي)



Sunny بعد يومين كم احتمالية إني اضل عل ← 2 Transition



$0.8 * 0.8 = 0.16$

$0.2 * 0.7 = 0.14$

] عدهم ↓ = 0.78

الطريقة اللي ح نعتمد عليها لحل ال Markov

initial state ⇒ حسب عند أي state كنت واقفة عندها حط 1 والباقي صفر

$[\underset{1}{1} \quad \underset{2}{0}]$ أو $[0 \quad 1]$

عدد ال State

Transition Matrix $m \times m$ ، m = عدد ال State

2×2

$$\begin{matrix} & 1 & 2 \\ 1 & 0.8 & 0.2 \\ 2 & 0.7 & 0.3 \end{matrix}$$

← لإيجاد احتمالية إني أكون في State معين بعد عدد معين من Transition

$$a_n = a_{(0)} P^n$$

2 Transition ⇒ $a_2 = [1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}^2$

← نعتبر أني واقفة عند Sunny (من السؤال)

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 0.78 & 0.22 \\ 0.77 & 0.23 \end{bmatrix}$$

$a_2 = [0.78 \quad 0.22]$

$$a_n = a_{(0)} P^n$$

(n) → عدد ال Transition

$a_{(0)}$ → [ ] عدد ال element بتكون = عدد ال States واللي بتكون 1 هي ال State اللي واقفة عندها والباقي صفر.

(P) → Transition matrix

← بحيث على الآلة الحاسبة فقط لحد تربيع أو تكعيب اذا اكبر من هيك بقسم القوى الى تنصيات ←

$P^6 = P^2 \times P^2 \times P^2$

The one-step transition probabilities can be presented in matrix form as:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

The matrix **P** defines a **Markov chain.** It has the property that all its transition probabilities p_{ij} are stationary and independent over time. Although a Markov chain may include an infinite number of states, the presentation in this chapter is limited to finite chains only, as this is the only type needed in the text.

Every year, during the March-through-September growing season, a gardener uses a chemical test to check soil condition. Depending on the outcome of the test, productivity for the new season can be one of three states: (1) good, (2) fair, and (3) poor. Over the years, the gardener has observed that last year's soil condition impacts current year's productivity and that the situation can be described by the following Markov chain:

3 States → 1 good, 2 fair, 3 poor

← ايش كان حدث السنة الماضية باثر كل الي بعدها؟

State of the system next year

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \\ \textit{State of} \\ \textit{the system} \\ \textit{this year} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Scanned with CamScanner

The transition probabilities show that the soil condition can either deteriorate or stay the same but never improve. For example, if this year's soil condition is good (state 1), there is a 20% chance it will not change next year, a 50% chance it will be fair (state 2), and a 30% chance it will deteriorate to a poor condition (state 3). The gardener alters the transition probabilities **P** by using organic fertilizer. In this case, the transition matrix becomes:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} \end{array}$$

بعد اضافة الأسمدة

The use of fertilizer can lead to improvement in soil condition.

اصبح موجود chances اكثر

Spammers Go Markovian

- The message is syntactically correct but its content is nonsensical
- It turned out that these syntactically correct but otherwise nonsensical inserts are totally computer generated and are used by spammers to bypass spam filters. Interestingly, the computer code used to generate these messages has its roots in Markov chains.
- The idea is to scan through a text (a paragraph, a chapter, or an entire book) to create a table that tallies the frequencies a word in the text is followed by other words. For example, in the text "*It is not what you say; it is what you do.*" the states of the Markov chain are represented by 7 words (8, if *It* and *it* are distinguishable) and two punctuations. There is a 100% chance that *It* (or *it*) is followed by *is*, and a 50-50 chance that *is* is followed by either *not* or *what*

Scanned with CamScanner

2$ بدأت دانا معي

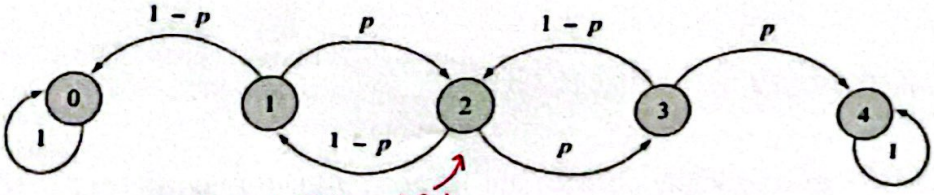
عدد الـ Transition

At time 0, I have $2. At times 1, 2, . . . , I play a game in which I bet $1. With probability p, I win the game, and with probability $1 - p$, I lose the game. My goal is to increase my capital to $4, and as soon as I do, the game is over. The game is also over if my capital is reduced to $0. If we define X_t to be my capital position after the time t game (if any) is played, then $X_0, X_1, \ldots, X_t$ may be viewed as a discrete-time stochastic process. Note that $X_0 = 2$ is a known constant, but X_1 and later X_t's are random. For example, with probability p, $X_1 = 3$, and with probability $1 - p$, $X_1 = 1$. Note that if $X_t = 4$, then X_{t+1} and all later X_t's will also equal 4. Similarly, if $X_t = 0$, then X_{t+1} and all later X_t's will also equal 0. For obvious reasons, this type of situation is called a *gambler's ruin* problem.

(P) بربح ← 1$ تلعب لحية وتراهن على
(1-P) تخسر ←

← states هي 0$, 1$, 2$, 3$, 4$

← اذا وصلت ل 4$ أو 0$ بتوقف اللعبة.
← "تنتقل فقط من حالة لحالة مباشرة"



3$ بلشت صفر هون إما بربح وبصير
أو بخسر وبرجع 1$ وهكذا

State

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{S0} & \text{S1} & \text{S2} & \text{S3} & \text{S4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Scanned with CamScanner

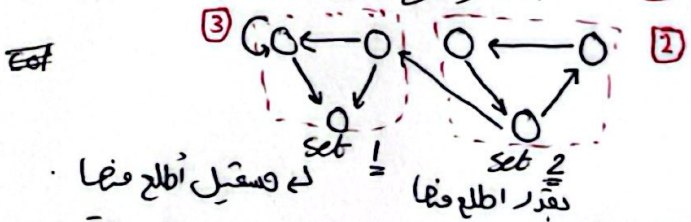
Cola Example

$$P = \begin{matrix} \\ Cola\,1 \\ Cola\,2 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{bmatrix} Cola\,1 & Cola\,2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .83 & .17 \\ .34 & .66 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P(P^2) = \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .83 & .17 \\ .34 & .66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .781 & .219 \\ .438 & .562 \end{bmatrix}$$

1 اذا يقدر أوصل من ز الى i ومن i الى ز



لا يستقبل أطلع فيها . يقدر اطلع فيها

absorbing state ← 3 لما أضل على نفس الـ state مجرد ما وصلتلها

4 اذا يقدر أوصل لـ ز من خلال i

recurrent state ← 5 اذا ماكانت transient تكون

DEFINITION 1 ■ Two states i and j are said to **communicate** if j is reachable from i, and i is reachable from j. ■

DEFINITION 2 ■ A set of states S in a Markov chain is a **closed set** if no state outside of S is reachable from any state in S. ■ ← اذا دخلت كلية ماطلع فيه

DEFINITION 3 ■ A state i is an **absorbing state** if $p_{ii} = 1$. ■ احتمالية إني أطلع فيها ← zero

DEFINITION 4 ■ A state i is a **transient state** if there exists a state j that is reachable from i, but the state i is not reachable from state j. ■

DEFINITION 5 ■ If a state is not transient, it is called a **recurrent state.** ■

DEFINITION 6 ■ A state i is **periodic** with period $k > 1$ if k is the smallest number such that all paths leading from state i back to state i have a length that is a multiple of k. If a recurrent state is not periodic, it is referred to as **aperiodic.** ■

6 علية الـ Transition تكون فترة ← Periodic

" " " ← شكل عشوائي aperiodic

لما نعرف عدد الـ Transition

Scanned with CamScanner